

# 模糊推理最大熵图像恢复算法

杨以琴 张伟涛 楼顺天

(西安电子科技大学工程学院, 西安 710071)

**摘要** 与线性恢复算法相比,基于最大熵的图像恢复算法具有更好的图像恢复效果,但其收敛速度较慢。为了提高最大熵图像恢复算法的收敛速度,首先给出了算法的非周期反卷积模型,然后采用模糊推理系统在线确定算法的迭代步长。由于采用了可变步长,因此极大地提高了算法的收敛速度。仿真实验表明提出的算法收敛速度快,图像恢复效果好。

**关键词** 最大熵 图像恢复 非周期反卷积模型 模糊推理系统

中图法分类号: TN911.73 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)04-0652-05

## Maximum Entropy Image Restoration Algorithm Using Fuzzy Inference System

YANG Yi-qin, ZHANG Wei-tao, LOU Shun-tian

(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

**Abstract** Comparing with the linear image restoration algorithms, the image restoration algorithm based on maximum entropy can obtain better performance. However, it has slow convergence rate. To improve the convergence speed of the maximum entropy based image restoration algorithm, we firstly present the aperiodic model of deconvolution, and then a fuzzy inference system is introduced to determine the iterative step size online. Since we adopt a variable step size, the convergence speed is significantly improved. The computer simulation results show that the proposed algorithm for image restoration has a faster convergence speed and yields improved restoration performance.

**Keywords** maximum entropy, image restoration, aperiodic model of deconvolution, fuzzy inference system

## 1 引言

在很多领域的实际工作中会涉及各种图像的记录和恢复。由于多种因素的影响,获得的图像经常会存在不同程度的模糊。假设  $x$  为原始图像,  $y$  为观测的模糊图像,  $h$  为光学系统的点扩展函数 (PSF),  $\xi$  为加性随机噪声, 则观测图像  $y$  可表示为

$$y(i, j) = x(i, j)h(i, j) + \xi(i, j) \\ = \sum_m \sum_n x(m, n)h(i - m, j - n) + \xi(i, j) \quad (1)$$

图像恢复就是根据已知的观测图像  $y$ , 并利用点扩展函数  $h$  (也可以是未知的) 恢复原始图像。

最大熵恢复是对图像恢复问题加以最大熵约束的一种方法, 要求恢复的图像在满足成像公式的前提下其图像熵最大。其优点: ①不需要对图像先验知识做更多假设, 可在抑制噪声和恢复细节间取得较好的平衡, 获得比线性恢复方法更高的分辨率; ②大多数的最大熵恢复算法还可恢复残缺图像 (不完全数据)。但该方法存在缺点: 最大熵方法作为一种非线性方法, 在数值求解上比较困难, 通常只能用极为耗时的迭代解法, 计算量巨大, 对计算设备要求较高, 这限制了它在一些领域的应用。



都较复杂,一种简单的选取方法是置初值  $x|_{\lambda=0} = x_0$  为观测图像  $y$  的平均常值图像<sup>[9]</sup>。

根据式(10)和  $x_0$ ,可以得到离散化的递推方程:

$$(V_k + \lambda_k F_h^T D F_h)(x_{k+1} - x_k) = -(\lambda_{k+1} - \lambda_k) F_h^T D (F_h x_k - y) \quad (11)$$

其中,  $k$  表示迭代次数,

$$V_k = \text{diag}[1/x_k(1,1), 1/x_k(1,2), \dots, 1/x_k(M_1, N_1)]$$

令  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, A_k = (V_k + \lambda_k F_h^T D F_h)$ ,

$\Delta \lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k, C_k = -\Delta \lambda F_h^T D (F_h x_k - y)$ ,则有:

$$A_k \Delta x_k = C_k \quad (12)$$

这是一个关于  $\Delta x_k$  的线性方程组,其中,  $A_k$  是对称正定的。这个方程组可以采用共轭梯度法来求解,它具有二次终止性,可以很快达到收敛。

步长  $\lambda$  的选取会影响算法的收敛速度,通常采用迭代的方法确定:  $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta \lambda, \lambda_0 = 0, \Delta \lambda$  表示迭代增量。一般情况下,  $\Delta \lambda$  取固定的小值。为了使算法加快收敛,通常采用变增量方向的切换策略:

$$\Delta \lambda = \begin{cases} |\Delta \lambda| & Q(x_{k+1}) > L/2 \\ -|\Delta \lambda| & \text{其他} \end{cases} \quad (13)$$

如果达到了  $|Q(x_{k+1}) - L/2| \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  是一个确定的阈值参数),则停止迭代。

### 3 基于模糊推理系统的迭代步长选取

在求解线性方程组式(12)时,  $\Delta \lambda$  的值应该根据待恢复图像的状况选取。因为当  $\Delta \lambda$  取值较大时,算法收敛快,但稳态误差较大,甚至发散;当  $\Delta \lambda$  取值较小时,稳态误差较小,但收敛速度慢。图1为  $\Delta \lambda$  分别取 0.01, 0.05, 0.5 时的收敛曲线。鉴于此,提出了一种基于模糊推理系统<sup>[10]</sup>的迭代步长选取方法。该方法能够在线确定合适的  $\Delta \lambda$  值,因此既能使算法加快收敛,又能获得好的恢复效果。

在迭代初始阶段,当  $Q(x_k)$  与  $L/2$  相差较大时,可以取较大的  $\Delta \lambda$ , 加快收敛;随着迭代次数的增加,  $Q(x_k)$  越来越接近  $L/2$ , 应逐渐减小  $\Delta \lambda$ , 以防止发散,保证算法的收敛性,并取得较好的恢复效果。因此,本文利用模糊推理系统来确定迭代步长  $\Delta \lambda$ 。

首先定义  $\varepsilon Q_k = \frac{|Q(x_k) - L/2|}{|Q(x_0) - L/2|}$ ,  $dQ_k =$

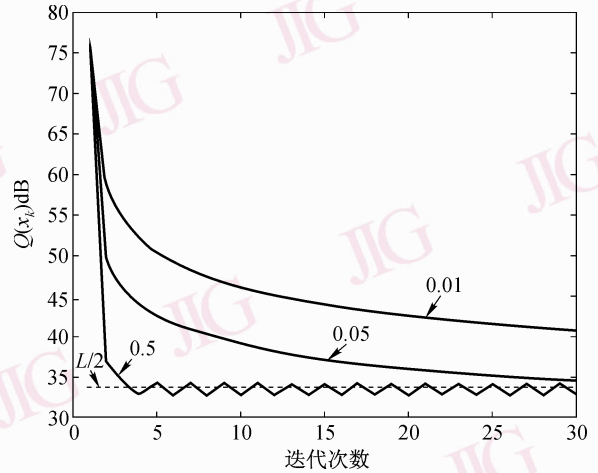


图 1  $Q(x_k)$  与  $\Delta \lambda$  的关系

Fig. 1 The relationship between  $Q(x_k)$  and  $\Delta \lambda$

$\frac{|Q(x_k) - Q(x_{k-1})|}{|Q(x_0) - L/2|}$ 。其中  $\varepsilon Q_k$  表示  $Q(x_k)$  的归一化误差,  $dQ_k$  表示  $Q(x_k)$  的归一化差分。模糊推理系统的输入可以取  $\varepsilon Q_k, dQ_k \in [0, 1]$ , 其输出  $d\lambda_k \in [0, 1]$ , 算法中的  $\Delta \lambda_k$  可如下确定

$$\Delta \lambda_k = d\lambda_k \times \eta \quad (14)$$

其中,  $\eta$  为常数,在一般灰度图像中取  $\eta = 0.4$ 。

根据算法的收敛特性,将  $\varepsilon Q_k$  和  $dQ_k$  分别模糊化为 4 个语义值: [Zero Small Mid Big],  $d\lambda_k$  模糊化为 7 个语义值:

[Zero Small1 Small2 Mid1 Mid2 Big1 Big2]。

模糊推理系统由两个输入(各有 4 个语义值)和一个输出(含有 7 个语义值)组成,具有  $4 \times 4 = 16$  条模糊推理规则,如表 1 所示。

表 1 模糊推理规则

Tab. 1 Fuzzy inference rules

$\varepsilon Q_k$	Zero	Small	Mid	Big
Zero	Zero	Small1	Small2	Mid1
Small	Small1	Small2	Mid1	Mid2
Mid	Small2	Mid1	Big1	Big2
Big	Mid1	Mid2	Big2	Big2

例如,模糊规则可描述为:

if  $\varepsilon Q_k$  is Small and  $dQ_k$  is Mid  
then  $d\lambda_k$  is Mid1.

模糊推理系统的隶属度函数曲线如图 2 所示,其得到的输入输出关系曲面如图 3 所示。

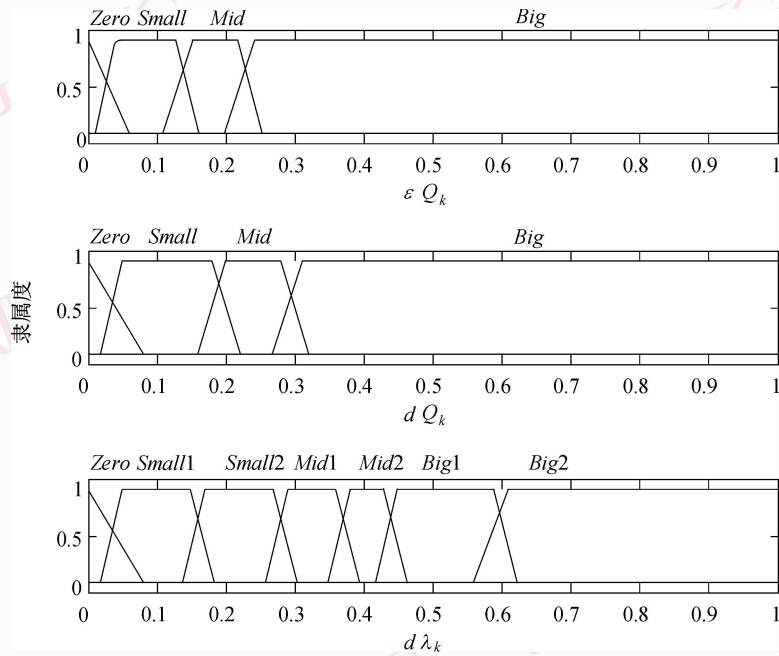


图 2  $\varepsilon Q_k$ 、 $dQ_k$ 、 $d\lambda_k$  的隶属度函数曲线

Fig. 2 Membership functions of  $\varepsilon Q_k$ ,  $dQ_k$  and  $d\lambda_k$

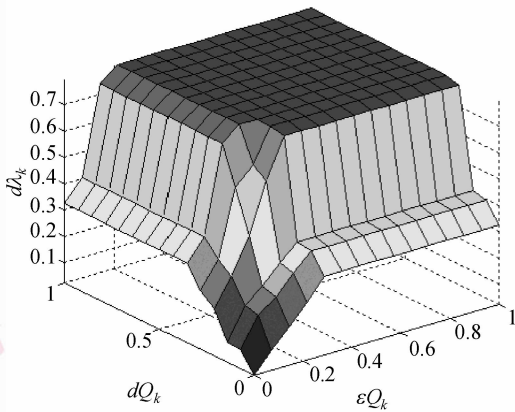


图 3 模糊推理系统的输入输出关系

Fig. 3 Input-output relationship of the fuzzy inference system

### 4 仿真结果

取  $256 \times 256$  像素的 Lena 灰度图像,散焦模糊点扩展函数尺寸为  $9 \times 9$ ,二者卷积后再加 10 dB 的零均值高斯白噪声,得到一幅模糊图像。利用提出的算法对模糊图像进行恢复,只需较少的迭代次数就能取得满意的恢复效果。

为了更深入地比较,这里引入另一种确定迭代步长的方法(分阶段固定步长):根据算法的特点,

$\Delta\lambda$  分 3 个阶段选取,每阶段内取相同的值:第 1 阶段, $\Delta\lambda$  取较大的值,以加快收敛速度;第 2 阶段,减小  $\Delta\lambda$  的值,防止震荡;第 3 阶段, $\Delta\lambda$  取较小的值,以确保较小的稳态误差。

论文对 3 种算法进行了仿真:固定步长、分阶段固定步长和模糊步长。从图 4 可以看出,与固定步长、分阶段固定步长算法相比,提出的算法(模糊步长)收敛速度有明显的提高,7 次迭代即可达到收敛精度,而其他两种方法在迭代 20 次后仍没有收敛。

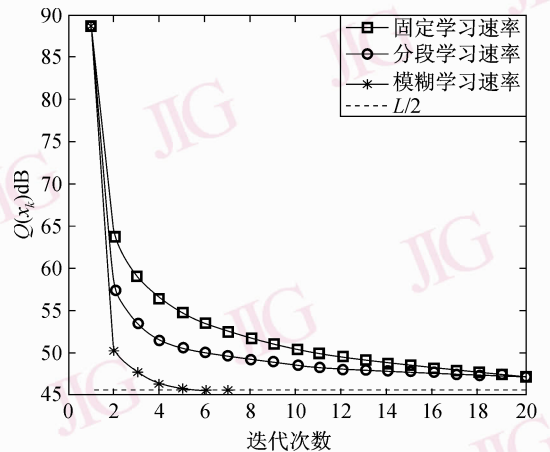


图 4 3 种算法的  $Q(x_k)$  收敛曲线

Fig. 4 Convergence curves of  $Q(x_k)$  for the three methods

从图 5 中可以看出,本文算法的均方误差 (MSE) 也有明显降低。图 6 给出了 Lena 图像的恢复结果,其中图 6(c) 为原固定步长最大熵算法的恢复效果,其信噪比提高量为  $\Delta SNR = 6.0726$  dB,图 6(d) 为提出的基于模糊推理的步长选取算法恢复效果,  $\Delta SNR = 8.5186$  dB。可见,本文算法可以取得更好的图像恢复效果。

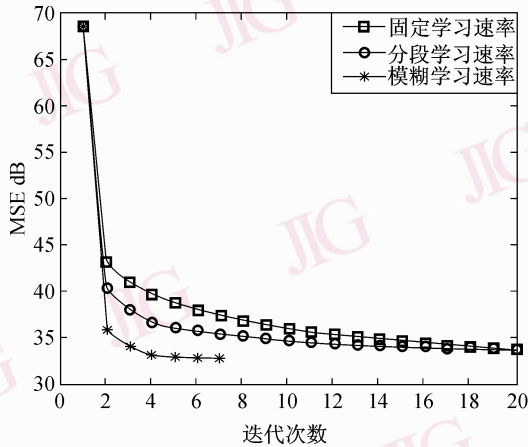


图 5 均方误差曲线

Fig. 5 Mean-square-error curves for the three methods



(a) 原始图像

(b) 模糊图像



(c) 原算法恢复效果图

(d) 改进算法恢复效果图

图 6 Lena 图像恢复结果比较

Fig. 6 Comparison of the recovered Lena image

## 5 结 论

对基于解微分方程的最大熵图像恢复算法进行了改进,引入模糊推理系统在线确定迭代步长  $\Delta\lambda$ 。

仿真结果表明,本文采用的模糊步长方法能够加快最大熵图像恢复算法的收敛速度,并且降低了稳态误差,改善了图像的恢复效果。如能再结合一些噪声估计的方法<sup>[11]</sup>,提出的算法有希望处理小信噪比的模糊图像。由于最大熵图像处理方法具有的优良特性,算法对散焦模糊、运动模糊、高斯模糊等各种降质图像均有很好的处理效果,因此本文提出的方法可以应用于实际的图像处理问题中。

## 参考文献 (References)

- 1 Frieden B R. Restoring with maximum likelihood and maximum entropy [J]. Journal of Optical Society of America, 1972, **62**(3): 511-518.
- 2 Burch S F, Gull S F, Skilling J K. Image restoration by a powerful maximum entropy method [J]. Computer Vision Graphics and Image Processing, 1983, **23**(5): 113-128.
- 3 Zhuang X H, Haralic R M, Zhao Y X. Maximum entropy image restoration [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, **39**(6): 1478-1480.
- 4 Zhuang X H, Einar O, Robert M H. A differential equation approach to maximum entropy image reconstruction [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1987, **35**(2): 208-218.
- 5 Zou Mou-yan, Unbehauen R, Lai X C. A maximum entropy restoration algorithm using the aperiodic model of deconvolution [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Neural Network and Signal Processing[C], Nanjing, 1995: 1352-1357.
- 6 Shi Dong-cheng, Zou Kuan-cheng, Hu Ming. A computer image restoration algorithm based on the aperiodic model of deconvolution [J]. Journal of Image and Graphics, 2000, **5**(A)(4): 318-322. [史东承, 邹宽城, 胡明. 一种基于非周期卷积反演模型的计算机图像恢复算法 [J]. 中国图象图形学报, 2000, **5**(A)(4): 318-322.]
- 7 Zou Mou-yan, Unbehauen R. On the computational model of a kind of deconvolution problem [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, **4**(10): 1464-1467.
- 8 Chen Chun-tao, Huang Bu-gen. The restoration of partly damaged noisy blur images using maximum entropy method [J]. Computer Applications and Software, 2004, **21**(8): 19-20. [陈春涛, 黄步根. 残损模糊图像的最大熵恢复 [J]. 计算机应用与软件, 2004, **21**(8): 19-20.]
- 9 Zou Mou-yan. Deconvolution and Signal Restoration [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2001. [邹谋炎. 反卷积和信号复原 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.]
- 10 Lou Shun-tian, Zhang Xian-da. Fuzzy-based learning rate determination for blind source separation [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2003, **11**(3): 375-383.
- 11 Rank K, Lendl M, Unbehauen R. Estimation of image noise variance [J]. IEE Proceedings Visual Image Signal Processing, 1999, **146**(2): 80-84.